高等代数 (II) 第一次作业情况

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1 补充说明

- 上交作业写清姓名和学号, 多张纸标好页码, 如没有装订须在每页正面写上个人信息;
- 注意叙述的科学性. 两个多项式的最大公因式有且仅有一个, 不应出现 “存在/一个 $\cdots\cdots$ 的最大公因式” 等类似表述; 在未说明 $g \mid f$ 时不应出现形如 $\frac{f}{g}$ 的表述.

2 2 月 21 日作业

无.

3 2 月 24 日作业

P8: 4, 5, 6, 7; P13: 3(2), 4, 7, 8

P8: 5. (注意零因子和零的差别) 若不然, 设可逆元 $r \in R$ 为左零因子, 那么根据定义存在非零 $s \in R$ 使得 $rs = 0$, 于是有

$$s = 1s = r^{-1}rs = r^{-1}0 = 0,$$

这与 $s \neq 0$ 的假设矛盾. 同理 r 也不可能为右零因子. □

4 2 月 28 日作业

P21: 1(2), 2, 3, 4, 5

P21: 1(2).

$$\begin{aligned}
&(x^4+6x^3-6x^2+6x-7,\ x^3+x^2-7x+5)\\
=&((x+5)(x^3+x^2-7x+5)+(-4x^2+36x-32),\ x^3+x^2-7x+5)\\
=&(-4x^2+36x-32,\ x^3+x^2-7x+5)\\
=&(x^2-9x+8,\ x^3+x^2-7x+5)\\
=&(x^2-9x+8,\ (x+10)(x^2-9x+8)+(75x-75))\\
=&(x^2-9x+8,\ 75x-75)\\
=&(x^2-9x+8,\ x-1)\\
=&((x-8)(x-1),\ x-1)=x-1
\end{aligned}$$

Conversely,

$$\begin{aligned}
&x-1\\
=&\frac{1}{75}(0(x^2-9x+8)+(75x-75))\\
=&\frac{1}{75}(-(x+10)(x^2-9x+8)+(x+10)(x^2-9x+8)+(75x-75))\\
=&\frac{1}{75}\cdot\frac{1}{4}((x+10)(-4x^2+36x-32)+4(x^3+x^2-7x+5))\\
=&\frac{1}{300}((x+10)((x+5)(x^3+x^2-7x+5)+(-4x^2+36x-32))\\
&\qquad\qquad+(4-(x+10)(x+5))(x^3+x^2-7x+5))\\
=&\frac{1}{300}((x+10)(x^4+6x^3-6x^2+6x-7)+(-x^2-15x-46)(x^3+x^2-7x+5))\\
=&\frac{x+10}{300}(x^4+6x^3-6x^2+6x-7)+\frac{-x^2-15x-46}{300}(x^3+x^2-7x+5)
\end{aligned}$$

□

题目 4.1. 设 $f,\ g\in\mathbb{F}[x]$, $\lambda\in\mathbb{F}$, 则

$$R(f,(x-\lambda)g)=(-1)^{\deg f}f(\lambda)R(f,g).$$

证明. Let

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\quad g(x)=\sum_{l=0}^{m}b_lx^l,$$

then

$$(x-\lambda)g(x)=(x-\lambda)\sum_{l=0}^{m}b_lx^l=\sum_{l=0}^{m}b_lx^{l+1}-\lambda\sum_{l=0}^{m}b_lx^l=b_mx^{m+1}+\sum_{l=1}^{m}(b_{l-1}-\lambda b_l)x^l-\lambda b_0.$$

By definition we have

$$R(f,(x-\lambda)g)=\begin{vmatrix}
a_n & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & & \\
 & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & a_n & \cdots & \cdots & a_1 & a_0\\
b_m & b_{m-1}-\lambda b_m & \cdots & b_0-\lambda b_1 & -\lambda b_0 & & \\
 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & b_m & b_{m-1}-\lambda b_m & \cdots & b_0-\lambda b_1 & -\lambda b_0
\end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1}+\lambda a_n & \cdots & a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda^{n-1}a_n & f(\lambda) & \lambda f(\lambda) & \cdots & \lambda^m f(\lambda) \\
 & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & a_n & a_{n-1}+\lambda a_n & \cdots & a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda^{n-1}a_n & & f(\lambda) \\
b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\
 & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & \\
 & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & f(\lambda) \\
b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & & \\
 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{(m+1)+(m+1+n)} f(\lambda) R(f,g) = (-1)^{\deg f} R(f,g)
$$

□

题目 4.2. 设

$$
\begin{aligned}
f &= 2x^3 - 3x^2 + \lambda x + 3 \\
g &= x^3 + \lambda x + 1.
\end{aligned}
$$

λ 为何值 f 和 g 有非平凡公因子.

证明. 除直接计算结式外, 还可对最小公因式进行变换.

$$
\begin{aligned}
(f,g) &= (2x^3 - 3x^2 + \lambda x + 3, x^3 + \lambda x + 1) \\
&= (x^3 - 3x^2 + 2, x^3 + \lambda x + 1) \\
&= (x-1, x^3 + \lambda x + 1)(x^2 - 2x - 2, x^3 + \lambda x + 1) \\
&= (x-1, 1^3 + \lambda \cdot 1 + 1)(x^2 - 2x - 2, 2x^2 + (\lambda+2)x + 1) \\
&= (x-1, \lambda+2)(x^2 - 2x - 2, (\lambda+6)x + 5) \\
&= (x-1, \lambda+2)(x - (1+\sqrt{3}), (\lambda+6)x + 5)(x - (1-\sqrt{3}), (\lambda+6)x + 5)
\end{aligned}
$$

其中对最小多项式拆分的合理性见第二次习题课讲义中 Lemma 3.1. 故 f 和 g 有非平凡公因子, 即 $(f,g) \neq 1$ 当且仅当 $\lambda + 2 = 0$ 或 $(\lambda+6)(1\pm\sqrt{3}) + 5 = 0$. 解之可得 $\lambda \in \{-2, (-7 \pm 5\sqrt{3})/2\}$. □

题目 4.3. 求

$$
R(x^n + x + 1, x^2 - 3x + 2).
$$

证明. 利用第一题结论,

$$
\begin{aligned}
R(x^n + x + 1, x^2 - 3x + 2) &= R(x^n + x + 1, (x-1)(x-2)) \\
&= (-1)^n (1^n + 1 + 1) R(x^n + x + 1, x - 2) \\
&= (-1)^n (1^n + 1 + 1)(-1)^n (2^n + 2 + 1) R(x^n + x + 1, 1) \\
&= 3 \cdot (2^n + 3)
\end{aligned}
$$

□