# 高等代数 (II) 第二次作业情况

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

## 1　3 月 3 日作业

P33: 1(2), 6, 7; P39: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9

P39: 9. 说明 $J_a$ 生成元 $m$ 的唯一性时, 设 $m'$ 为满足要求的多项式, 不能事先假定其次数最小.

## 2　3 月 7 日作业

P41: 2; P49: 1(2), 2(2)(4)(5)(6), 4, 5, 6

P49 2. 判断可约性与判断是否有有理根不等价, 须强调次数小于 4.

**题目 2.1.** 分别给出 $f(x) = x^n - a \in \mathbb{R}[x]$ 在 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的标准不可约分解.

*证明.* For $a = 0$, the standard decomposition of $f$ is $x^n$ itself. For $a \neq 0$, let $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$ and $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ with $r = |a| > 0$, then

$$x^n - a = x^n - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x - r^{1/n}\mathrm{e}^{\frac{(2\pi k+\theta)\mathrm{i}}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x - r^{1/n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}\zeta^k\right),$$

which corresponds to the standard irreducible decomposition on $\mathbb{C}$.

- $\theta = 0$ $(a > 0)$. For $n = 2m$,

$$\begin{aligned}
x^{2m} - a &= \prod_{k=0}^{2m-1}\left(x - r^{\frac{1}{2m}}\zeta^k\right) \\
&= \left(x - r^{\frac{1}{2m}}\zeta^0\right)\left(x - r^{\frac{1}{2m}}\zeta^m\right)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x - r^{\frac{1}{2m}}\zeta^k\right)\left(x - r^{\frac{1}{2m}}\zeta^{2m-k}\right) \\
&= \left(x - r^{\frac{1}{2m}}\right)\left(x + r^{\frac{1}{2m}}\right)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2 - r^{\frac{1}{2m}}(\zeta^k + \zeta^{2m-k}) + r^{\frac{1}{m}}\zeta^{2m}\right) \\
&= \left(x - r^{\frac{1}{2m}}\right)\left(x + r^{\frac{1}{2m}}\right)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2 - 2r^{\frac{1}{2m}}\cos\frac{2k\pi}{2m} + r^{\frac{1}{m}}\right)
\end{aligned}$$

For $n = 2m + 1$,

$$
\begin{aligned}
x^{2m+1} - a &= \prod_{k=0}^{2m} \left(x - r^{\frac{1}{2m}} \zeta^k\right) \\
&= \left(x - r^{\frac{1}{2m+1}} \zeta^0\right) \prod_{k=1}^{m} \left(x - r^{\frac{1}{2m+1}} \zeta^k\right) \left(x - r^{\frac{1}{2m}} \zeta^{2m+1-k}\right) \\
&= \left(x - r^{\frac{1}{2m+1}}\right) \prod_{k=1}^{m-1} \left(x^2 - r^{\frac{1}{2m+1}} (\zeta^k + \zeta^{2m+1-k}) + r^{\frac{2}{2m+1}} \zeta^{2m+1}\right) \\
&= \left(x - r^{\frac{1}{2m+1}}\right) \prod_{k=1}^{m-1} \left(x^2 - 2r^{\frac{1}{2m+1}} \cos \frac{2k\pi}{2m+1} + r^{\frac{2}{2m+1}}\right)
\end{aligned}
$$

- $\theta = \pi$ $(a < 0)$. For $n = 2m$,

$$
\begin{aligned}
x^{2m} - a &= \prod_{k=0}^{2m-1} \left(x - r^{\frac{1}{2m}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2m}} \zeta^k\right) \\
&= \prod_{k=0}^{m-1} \left(x - r^{\frac{1}{2m}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2m}} \zeta^k\right) \left(x - r^{\frac{1}{2m}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2m}} \zeta^{2m-1-k}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{m-1} \left(x^2 - r^{\frac{1}{2m}} \left(\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi\mathrm{i}}{2m}} + \mathrm{e}^{\frac{(2(2m-1-k)+1)\pi\mathrm{i}}{2m}}\right) + r^{\frac{1}{m}} \mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi\mathrm{i}}{2m} + \frac{(2(2m-1-k)+1)\pi\mathrm{i}}{2m}}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{m-1} \left(x^2 - 2r^{\frac{1}{2m}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m} + r^{\frac{1}{m}}\right)
\end{aligned}
$$

For $n = 2m + 1$,

$$
\begin{aligned}
x^{2m+1} - a &= \prod_{k=0}^{2m} \left(x - r^{\frac{1}{2m+1}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2m+1}} \zeta^k\right) \\
&= \left(x - r^{\frac{1}{2m+1}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2m+1}} \zeta^m\right) \prod_{k=0}^{m-1} \left(x - r^{\frac{1}{2m+1}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2m+1}} \zeta^k\right) \left(x - r^{\frac{1}{2m+1}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2m+1}} \zeta^{2m-k}\right) \\
&= \left(x + r^{\frac{1}{2m+1}}\right) \prod_{k=0}^{m-1} \left(x^2 - r^{\frac{1}{2m+1}} \left(\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi\mathrm{i}}{2m+1}} + \mathrm{e}^{\frac{(2(2m-k)+1)\pi\mathrm{i}}{2m+1}}\right) + r^{\frac{2}{2m+1}} \mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi\mathrm{i}}{2m+1} + \frac{(2(2m-k)+1)\pi\mathrm{i}}{2m+1}}\right) \\
&= \left(x + r^{\frac{1}{2m+1}}\right) \prod_{k=0}^{m-1} \left(x^2 - 2r^{\frac{1}{2m+1}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m+1} + r^{\frac{1}{m}}\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

**Corollary 2.1.** *By letting $x = 1$ and $a = -1$ we have*

$$
\begin{aligned}
1 + 1 &= \prod_{k=0}^{m-1} \left(2 - 2\cos \frac{(2k+1)\pi}{2m}\right) \\
1 + 1 &= (1 + 1) \prod_{k=0}^{m-1} \left(2 - 2\cos \frac{(2k+1)\pi}{2m+1}\right),
\end{aligned}
$$

*which indicates*

$$2 = 2^m \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2m}\right) = 2^{2m} \prod_{k=0}^{m-1} \sin^2\frac{(2k+1)\pi}{4m},$$
$$1 = 2^m \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}\right) = 2^{2m} \prod_{k=0}^{m-1} \sin^2\frac{(2k+1)\pi}{4m+2}.$$

# 3 3 月 10 日作业

P71: 3, 7, 8

P71: 8. 令 $\pi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$, $\pi(f)$ 有/无 $n$ 次因式是否蕴含 $f$ 自身一定有/无 $n$ 次因式? 注意本题无法使用 mod $p$ 判别法 ($p = 2$ or 3):

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5 = x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(x^3 + x + 1) \mod 2,$$
$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5 = x^4 + 1 = (x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) \mod 3$$

# 4 3 月 14 日作业

P57: 2, 3, 4

**题目 4.1.** 证明 $\det(x_{ij})_{i,j}$ 不可约.

证明. 设

$$\det(x_{ij})_{i,j} = x_{11}A_{11} + x_{12}A_{12} + \cdots + x_{1n}A_{1n} = gh, \quad g, h \in \mathbb{F}[x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}].$$

注意到 $\det(x_{ij})_{i,j}$ 关于任一 $x_{ij}$ 都是 1 阶的, 不妨令 $g$ 关于 $x_{11}$ 的次数为 1 次, $h$ 关于 $x_{11}$ 的次数为 0 次. 断言对任意 $j$, $g$ 关于 $x_{1j}$ 的次数也为 1 次, $h$ 关于 $x_{1j}$ 的次数也为 0 次. 当 $j = 1$ 时结论是平凡的, 当 $j \neq 1$ 时, 若 $g$ 关于 $x_{1j}$ 的次数为 0 次, $h$ 关于 $x_{1j}$ 的次数为 1 次, 那么

$$\det(x_{ij})_{i,j} = x_{11}A_{11} + x_{1j}A_{1j} + \sum_{k \neq 1,j} x_{1k}A_{1k} = gh = (g_1 x_{11} + g_2)(h_1 x_{1j} + h_2),$$

其中

$$A_{11}, A_{1j}, \sum_{k \neq 1,j} x_{1k}A_{1k}, g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathbb{F}[\{x_{kl} | (k,l) \neq (1,1), (1,j)\}].$$

将上述等式视为关于 $x_{11}$ 和 $x_{1j}$ 的二元多项式可知 $g_1 h_1 = 0$, 再结合 $\mathbb{F}[\{x_{kl} | (k,l) \neq (1,1), (1,j)\}]$ 无零因子可知 $g_1$ 和 $h_1$ 中至少有一个为零多项式, 这与 $g$ 关于 $x_{11}$ 的次数为 1 次, $h$ 关于 $x_{1j}$ 的次数为 1 次矛盾. 至此我们已证得当 $h$ 关于 $x_{11}$ 的次数为 0 次时, 对任意 $j$, $h$ 关于 $x_{1j}$ 的次数均为 0 次. 类似地, 对任意 $i$ 和 $j$, $h$ 关于 $x_{ij}$ 的次数也为 0 次, 于是 $h$ 为单位. 结合 $g$ 和 $h$ 的任意性立即有 $\det(x_{ij})_{i,j}$ 不可约.

另法: (数学归纳法) 显然命题对 1 阶行列式成立. 假设命题对 $(n-1)$ 阶行列式成立, 那么对于 $n$ 阶行列式

$$\det(x_{ij})_{i,j} = x_{11}A_{11} + \cdots + x_{1n}A_{1n} = gh,$$

同理可知不妨设

$$g = g_1 \cdot x_{11} + g_2, \quad g_1, g_2, h \in \mathbb{F}[\{x_{kl} | (k,l) \neq (1,1).\}]$$

代入 $\det(x_{ij})_{i,j}$ 的分解可知

$$g_1 h = A_{11},\, g_2 h = \sum_{k\neq 1} x_{1k} A_{1k}.$$

利用归纳假设知 $A_{11}$ 不可约, 那么 $g_1$ 或 $h$ 为单位. 假设 $g_1$ 为单位, 不妨进一步令 $g_1 = 1$, 于是 $h = A_{11}$,

$$g_2 A_{11} = \sum_{k\neq 1} x_{1k} A_{1k}.$$

再考虑等式两边关于 $x_{12}$ 的系数可知 $g_2$ 关于 $x_{12}$ 的次数为 1, 可设

$$g_2 = g_3 \cdot x_{12} + g_4,\, g_3 A_{11} = A_{12},$$

$A_{11}$ 不为单位, 且与 $A_{12}$ 不相伴, 这与归纳假设 $A_{12}$ 不可约矛盾. 故最终得到 $h$ 为单位. $\square$