高等代数 (II) 第三次习题课

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1 内容概要

- 用初等对称多项式表示对称多项式;
- 求多项式的判别式 (Newton 公式, 结式);
- 求矩阵的不变因子, 初等因子, 有理标准型, 视为复矩阵的 Jordan 标准型.

2 补充知识

2.1 对称多项式

Definition 2.1.1. 定义

$$W = \{f \in R[x_1, \cdots, x_n] | f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}), \forall \pi \in S(n)\}$$

为对称多项式之集, 其继承 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 上的运算构成子环. 又称

$$\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n,\ \sigma_2 = x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n,\ \sigma_k = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} x_{j_1}\cdots x_{j_k},\ \sigma_n = x_1\cdots x_n$$

为初等对称多项式 *(elementary symmetric polynomials)*.

Theorem 2.1.2. 任意对称多项式可由初等对称多项式唯一标出, 即

$$\begin{aligned} T : R[x_1, \cdots, x_n] &\to W \\ x_k &\mapsto \sigma_k \\ h(x_1, \cdots, x_n) &\mapsto h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \end{aligned}$$

为环同构. 这同时也说明了 $W = R[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$.

证明. 直接构造. 令 $ax_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$ 为 $f \in W$ 的首项, $a \in R$, $l_1 \ge l_2 \ge \cdots \ge l_n$. 构造

$$\varphi_1 = a\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_n^{l_n},$$

其拥有首项

$$ax_1^{l_1-l_2}(x_1x_2)^{l_2-l_3}\cdots(x_1\cdots x_n)^{l_n} = ax_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}.$$

令 $f_1 = f - \varphi_1$, 其首项次数严格小于 f 的首项次数 (in canonical order). 依次构造 $f_1, f_2, \cdots$, 直至 $f_q = 0$. 取 $f = f_1 + \cdots + f_q \in W$ 即可. 下面再证 T 为单射, 只需说明 $\ker T = 0$. 考虑

$$f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = 0$$

中次数最高的项, 得必为 0 单项式. □

2.2 重根与判别式

考虑首一多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = \prod_{k=1}^{n}(x - z_k).$$

那么

$$f \text{ 有重根 } \iff z_k = z_l \text{ for some } k \neq l \iff \prod_{k<l}(z_k - z_l)^2 = 0.$$

Vieta's formulas 给出

$$\sigma_k(z_1, \cdots, z_n) = (-1)^k a_{n-k},\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

令

$$g = T^{-1}\left(\prod_{k<l}(x_k - x_l)^2\right),$$

有

$$\prod_{k<l}(z_k - z_l)^2 = TT^{-1}\left(\prod_{k<l}(x_k - x_l)^2\right)\Bigg|_{x_j = z_j} = g(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)|_{x_j = z_j} = g(-a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, (-1)^n a_0),$$

记为 f 的判别式 $D(f)$ (discriminant). 一般地, 对于非首一的多项式 f, 约定

$$D(f) = a_n^{2n-2} D(a_n^{-1} f).$$

2.3 Newton 公式

$$\begin{aligned}
D(f) &= g(-a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, (-1)^n a_0) = V(z_1, \cdots, z_n)^2 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Proposition 2.3.1 (Newton's identities)**.** *The relation of*

$$s_l = \sum_{k=1}^{n} x_k^l \text{ and } \sigma_l = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_l}$$

are given as follows:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sigma_1, \\
s_2 &= \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2, \\
s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3, \\
s_k &= \cdots\cdots\cdots (k \leq n) \\
s_n &= \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} s_1 + (-1)^{n+1} n\sigma_n, \\
s_n &= \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} s_1 + (-1)^{n+1} \sigma_n s_0, \\
s_{n+1} &= \sigma_1 s_n - \sigma_2 s_{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} s_2 + (-1)^{n+1} \sigma_n s_1, \\
s_{n+2} &= \sigma_1 s_{n+1} - \sigma_2 s_n + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} s_3 + (-1)^{n+1} \sigma_n s_2, \\
s_{n+k} &= \cdots\cdots\cdots \ (\textit{at most } n \textit{ terms})
\end{aligned}$$

2.4 矩阵环

对于数阵, 其矩阵加法和乘法只依赖于矩阵元素所在环的结构. 类比 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的矩阵, 可类似定义一般的环 R 上的元素组成的矩阵, 构成的矩阵全体记为 $M_n(R)$. 不难验证 $M_n(R)$ 自身也为一个环.

- 子环 (subring). 按矩阵结构, 可单独取出对角/上三角/下三角矩阵全体构成 $M_n(R)$ 的子环; 亦可利用 R 本身的结构, 若 R' 为 R 的子环, 则 $M_n(R')$ 也为 $M_n(R)$ 的子环;
- 中心 (center). 与所有元素可交换的元素之集, 也构成 $M_n(R)$ 的一个子环, 记为 $Z(M_n(R))$. 例如 $Z(M_n(\mathbb{R}))$ 为全体数量阵之集;
- 单位 (unit). 所有可逆元之集, 也构成 $M_n(R)$ 的一个子环, 记为 $GL_n(R)$.

Theorem 2.4.1. *(Smith Normal Form, SNF) 对任意 $A \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$, 存在可逆 P, Q(初等 λ-阵) 使得*

$$PAQ = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n),\ d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n.$$

Remark 2.4.2. *SNFs exist for general PIDs and non-square matrices. See https://en.wikipedia.org/wiki/Smith_normal_form for a constructive proof.*

3 典型例题

Problem 3.1. 求 $T^{-1}(\sum x_1^2 x_2^2)$.

证明. 取 $\sum x_1^2 x_2^2$ 的首项次数 $(2, 2, 0 \cdots, 0)$, 得以构造 σ_2^2.

$$\sum x_1^2 x_2^2 - \sigma_2^2 = -2\sum x_1^2 x_2 x_3 - 6\sum x_1 x_2 x_3 x_4$$
$$\sum x_1^2 x_2 x_3 = \sigma_1\sigma_3 - 4\sum x_1 x_2 x_3 x_4.$$

于是

$$\sum x_1^2 x_2^2 = \sigma_2^2 - 2\sum x_1^2 x_2 x_3 - 6\sigma_4 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4.$$

注意当 $n < 4$ 时, 需要删去 σ_3 或/和 σ_4. □

Remark 3.2. *经过上述计算可总结以下规律:*

1. 任一对称多项式可写为若干单项式之和, 而这些单项式可视为若干代表元循环求和, 即若已知 $f \in W$ 的最高次项为 $x_1^2x_2^2$, 则必可写为

$$f = a\sum x_1^2x_2^2 + b\sum x_1^2x_2x_3 + c\sum x_1x_2x_3x_4.$$

2. 上述分解中求和号前系数与任一代表元在 f 中的系数一致.

3. 要计算某单项式在 f 中的系数, 只需统计生成方式的可能组合. 例如

$$f = \sum x_1^2x_2^2 - (x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n)^2 = a\sum x_1^2x_2x_3 + b\sum x_1x_2x_3x_4.$$

   - 对于系数 a, $x_1^2x_2x_3 = x_1x_2 \cdot x_1x_3$, 对应 $a = -2$;
   - 对于系数 b, $x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2 \cdot x_3x_4 = x_1x_3 \cdot x_2x_4 = x_1x_4 \cdot x_2x_3$, 对应 $b = -6$.

进一步思考, 原计算过程是否可以进行简化? 为叙述方便, 令

$$[2,2] = \sum x_1^2x_2^2,\ [2,1,1] = \sum x_1^2x_2x_3,\ [\alpha] = \sum x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \cdot x_n^{\alpha_n},$$

那么对于任一 α 满足 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$,

$$[\alpha] = \sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\cdots\sigma_n^{\alpha_n} + \sum_{\substack{\beta<\alpha \\ |\beta|=|\alpha| \\ \beta_1\geq\cdots\geq\beta_n}} C(\alpha,\beta)[\beta],$$

其中 $C(\alpha,\beta)$ 为相应系数. 归纳易得

$$[\alpha] = \sum_{\substack{\beta<\alpha \\ |\beta|=|\alpha| \\ \beta_1\geq\cdots\geq\beta_n}} \tilde{C}(\alpha,\beta)\sigma_1^{\beta_1-\beta_2}\cdots\sigma_n^{\beta_n}.$$

故仅需

1. 列举所有 β 满足 $\beta < \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$ 且 $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$;
2. 求出 $\sigma_1^{\beta_1-\beta_2}\cdots\sigma_n^{\beta_n}$;
3. 求出相应系数.

Problem 3.3. 求 $T^{-1}\left((x_1^2+2x_2x_3)(x_2^2+2x_3x_1)(x_3^2+2x_1x_2)\right)$.

证明. 令 $f = (x_1^2+2x_2x_3)(x_2^2+2x_3x_1)(x_3^2+2x_1x_2)$, 得首项次数为 4, 1, 1, 于是有

$$f = c_1[4,1,1] + c_2[3,3,0] + c_3[3,2,1] + c_4[2,2,2] = d_1\sigma_1^3\sigma_3 + d_2\sigma_2^3 + d_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + d_4\sigma_3^2.$$

其中 $d_1 = 4$ 可通过观察 f 的首项系数直接得到. 接下来利用待定系数法:

- $(x_1,x_2,x_3) = (1,1,0)$: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$.

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2 = d_1 \cdot 2^3 \cdot 0 + d_2 \cdot 1^3 + d_3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 + d_4 \cdot 0^2;$$

- $(x_1,x_2,x_3) = (1,1,1)$: $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$.

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3^3 = d_1 \cdot 2^3 \cdot 1 + d_2 \cdot 3^3 + d_3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 + d_4 \cdot 1^2;$$

- $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, -1)$: $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = -1$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3 = d_1 \cdot 1^3 \cdot (-1) + d_2 \cdot (-1)^3 + d_3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + d_4 \cdot (-1)^2.$$

解得 $d_2 = 2$, $d_3 = -18$, $d_4 = 27$. $\square$

Problem 3.4. 求方程 $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ 的三个复根构成等差数列的充要条件.

证明. 令

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_3 - x_1)(2x_3 - x_1 - x_2).$$

求 $T^{-1}f$ 得

$$f = 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3.$$

结合 Vieta's formulas:

$$f(z_1, z_2, z_3) = 0 \iff 2(-a_2)^3 - 9a_1(-a_2) + 27(-a_0) = 0.$$

$\square$

Remark 3.5. 类似地, 可以求得 "三个复根某一个平方成为另两个平方和" 的充要条件.

Problem 3.6. 求 $D(x^n + a)$.

证明. 利用 Vieta's formulas:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0,\ \sigma_n = (-1)^n a.$$

结合 Newton's identities:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sigma_1 = 0, \\
s_2 &= \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
s_{n-1} &= \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-2}s_1 + (-1)^n(n-1)\sigma_{n-1} = 0, \\
s_n &= \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} s_1 + (-1)^{n+1} n\sigma_n = -na, \\
s_{n+1} &= \sigma_1 s_n - \sigma_2 s_{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} s_2 + (-1)^{n+1}\sigma_n s_1 = 0, \\
s_{n+2} &= \sigma_1 s_{n+1} - \sigma_2 s_n + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} s_3 + (-1)^{n+1}\sigma_n s_2 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
s_{2n-2} &= \sigma_1 s_{2n-3} - \sigma_2 s_{2n-4} + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} s_{n-1} + (-1)^{n+1}\sigma_n s_{n-2} = 0.
\end{aligned}$$

于是

$$D(x^n + a) = \begin{vmatrix} n & & & 0 \\ & & \iddots & -na \\ & \iddots & \iddots & \\ 0 & -na & & \end{vmatrix} = n(-na)^{n-1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}.$$

$\square$

Remark 3.7. 判别式亦可通过结式给出, 主要依赖以下结论:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}(f,f') &= a_0^{n-1}\prod_{k=1}^{n} f'(x_k) \\
&= a_0^{n-1}\prod_{k=1}^{n} a_0 \sum_{j=1}^{n}\prod_{l\neq j}(x_k-x_l) \\
&= a_0^{2n-1}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l\neq k}(x_k-x_l) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-1}\prod_{k<l}(x_k-x_l)^2,
\end{aligned}
$$

即

$$
\mathrm{R}(f,f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D(f).
$$

对上题另解:

$$
\begin{aligned}
D(x^n+a) &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\mathrm{R}(x^n+a, nx^{n-1}) \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & a & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \\
 & & 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\
n & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & n & & &
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}
\begin{vmatrix}
I_{n-1} & 0 & I_{n-1} \\
I_n & &
\end{vmatrix}
= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Remark 3.8. 利用结式还可求稍微复杂的 $D(x^n+a_1x+a_0)$, 留作思考.

Problem 3.9. 考虑

$$
f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x].
$$

讨论 $D(f)$ 的符号与 f 的零点的关系.

证明. 当 $D(f)=0$ 时 f 在 $\mathbb{C}$ 上有重根, 而由于虚根总是成对出现, 可知重根为实根, 故而 f 的另一零点也为实数. 当 $D(f)\neq 0$ 时,f 的三个零点互不相同. 若全为实数则必有 $D(f)>0$, 否则不妨设三个零点分别为

$$
z_1\in\mathbb{R},\ z_2 = a+b\mathrm{i},\ z_3 = a-b\mathrm{i},\ a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0.
$$

此时

$$
D(f) = (a+b\mathrm{i}-z_1)^2(a-b\mathrm{i}-z_1)^2(2b\mathrm{i})^2 = -4b^2((a-z_1)^2+b^2) < 0.
$$

综上所述, 当 $D(f)\geq 0$ 对应三个实根, 且 $D(f)=0$ 时有重根; $D(f)<0$ 对应一个实根和两个共轭复根. □

Remark 3.10. 特别地, 当 $a_2=0$ 时可通过 $D(f)=-4a_1^3-27a_0^2$ 讨论 $f=0$ 的根的情况. 称代数曲线

$$
y^2 = x^3 + a_1x + a_0
$$

为椭圆曲线, 若 $4a_1^3+27a_0^2>0$, 即代数曲线与 x 轴在 $\mathbb{R}^2$ 中只有一个交点. 椭圆曲线加密算法 *(elliptic curve cryptography, ECC)* 的实现以椭圆曲线上的群结构为基础, 已在现代密码学领域得到了广泛的应用.

Problem 3.11. 计算下列 λ-矩阵的标准形.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}3 & -6 & \lambda-8\\ \lambda+2 & 0 & -3\\ -2 & \lambda+2 & 4\end{pmatrix}\qquad B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda^2-1 & \lambda+1\\ & & 1-\lambda^3\end{pmatrix}$$

证明. 直接进行行列变换

$$A(\lambda)\to\begin{pmatrix}1 & \lambda-4 & \lambda-4\\ \lambda+2 & 0 & -3\\ -2 & \lambda+2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda+2 & -\lambda^2+2\lambda+8 & -\lambda^2+2\lambda+5\\ -2 & \lambda+2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & -\lambda^2+2\lambda+8 & -\lambda^2+2\lambda+5\\ & 3\lambda-6 & 2\lambda-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & -\lambda^2+2\lambda+8 & -3\\ & 3\lambda-6 & -\lambda+2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & -\lambda^2+2\lambda-1 & -1\\ & & -\lambda+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & (\lambda-1)^2 & -3\\ & & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & (\lambda-1)^2 & -3\\ & \frac{1}{3}(\lambda-1)^2(\lambda-2) & \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

$B(\lambda)$ 对应的行列式因子

$$D_1=1,D_2=\left(\begin{vmatrix}\lambda & \\ & \lambda^2-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\lambda & \\ & \lambda+1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\lambda & \\ & 1-\lambda^3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\lambda^2-1 & \lambda+1\\ & 1-\lambda^3\end{vmatrix}\right)=1$$

得 $B(\lambda)$ 相抵于 $\operatorname{diag}(1,1,\det B(\lambda))$. □

Problem 3.12. 给出

$$A=\begin{pmatrix}8 & -3 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 0 & 2\\ -10 & 6 & -3 & 4\\ 2 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

的相似标准形.

证明. 计算其对应 λ-矩阵的相抵标准形:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-8 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 0 & -2 \\ 10 & -6 & \lambda+3 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda-2 & 3 & -3 & -3\lambda+8 \\ & \lambda-3 & & -2 \\ -2\lambda+4 & -6 & \lambda+3 & \lambda^2+\lambda-10 \\ & & -1 & \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & & & \\ -3 & \lambda-2 & 3 & -3\lambda+8 \\ & & \lambda-3 & -2 \\ \lambda+3 & -2\lambda+4 & -6 & \lambda^2+\lambda-10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda-2 & 3 & -3\lambda+8 \\ & -2\lambda+4 & -6 & \lambda^2+\lambda+10 \\ & & \lambda-3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \lambda-2 & 3 & -3\lambda+8 & \\ & & \lambda-3 & -2 \\ & & & \lambda^2-5\lambda+6 \end{pmatrix}$$

注意与数阵不同, 由最后的相抵标准形一般无法得到其相抵于 $\mathrm{diag}(1, \lambda-2, \lambda-3, (\lambda-2)(\lambda-3))$, 但往往可借此探究行列式因子的取值. 对于右下角的三阶子阵有

$$D_1 = 1,\ D_2 \mid \left(\begin{pmatrix} \lambda-2 & \\ & \lambda-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3\lambda+8 \\ \lambda-3 & -2 \end{pmatrix} \right) = 1,$$

于是 $\lambda I - A$ 与 $\mathrm{diag}(1,1,1,(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2)$ 相抵, 原矩阵 A 的相似标准形为

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

□