高等代数 (II) 第四次习题课

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1 内容概要

- 子空间的交, 和;
- 商空间的基和维数.

2 补充知识

2.1 线性空间与线性表出

Definition 2.1.1 (vector space)**.** *设 R 为环. 一个 R-(左) 模包含 Abel 群 $(M,+)$ 及 $\cdot : R \times M \to M$ 满足*

- $r \cdot (x+y) = r \cdot x + r \cdot y$ *($r \cdot -$ 为群同态);*
- $(r+s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$*;*
- $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$*;*
- $1 \cdot x = x$*.*

特别地, 当 R 为域时, 这样的模又称为线性空间.

Example 2.1.2. *一些线性空间的例子:*

- *a field $\mathbb{F}$ itself;*
- *多项式环和相应的数乘运算. (无限维空间)*
- *$C(X)$ or $\mathbb{R}^X$, $X \subseteq \mathbb{R}$ countable.*

Definition 2.1.3. *设 V 为一线性空间, 设 $S, T \subseteq V$. 记*

$$\operatorname{span} S := \left\{ \sum_k \alpha_k s_k | s_k \in S \right\} \quad (\textit{finite sum}).$$

称 T 可由 S 线性表出, 若 $T \subseteq \operatorname{span} S$.

2.2 线性空间的基

记 $\mathcal{Q}(V)$ 为线性空间 V 中线性无关子集全体, 显然有 $A, B \in \mathcal{Q}(V)$, 且当 $A \subseteq B$ 时有 $A \subseteq \operatorname{span} B$. 对于偏序集 $(\mathcal{Q}(V), \subseteq)$, 其极大元始终存在, 且若 $C \in \mathcal{Q}(V)$ 为极大元, 则必定满足 $\operatorname{span} C = V$. 且由基本引理 (教材 P76 引理 1) 知极大元可能不唯一, 但极大元中元素个数始终唯一, 将其定义为线性空间的维数 $\dim V$.

Remark 2.2.1. *由 Zorn 引理可证明对任意 $A \in \mathcal{Q}(V)$, 存在极大元 A' 满足 $A \subseteq A'$, 即线性空间中任一线性无关组总可扩充为线性空间的一组基. 对有限维空间可直接归纳, 而对无限维空间需要 Zorn 引理应用在 $\mathcal{Q}(V)$ 中包含 A 的所有元素构成的子集上.*

2.3 子空间的交/和的维数关系

对于子空间 $V_1, V_2 \subseteq V$, 有

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2).$$

证明可以考虑

$$V_1 \xhookrightarrow{i} V_1 + V_2 \xrightarrow{q} (V_1 + V_2)/V_2$$

利用同态基本定理可得

$$V_1/(V_1 \cap V_2) = V_1/\ker(q \circ i) \cong (V_1 + V_2)/V_2.$$

Proposition 2.3.1. *称 $V_1 + V_2$ 为直和 (direct sum), 记为 $V_1 \oplus V_2$, 若下列之一 (TFAE) 成立:*

- $V_1 \cap V_2 = 0$ $(\dim(V_1 \cap V_2) = 0)$;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$;
- $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$;
- *V_1 与 V_2 的任意一组基可以合并为 $V_1 + V_2$ 的一组基.*

对于最后一条的逆命题不成立, 因为无法保证 $V_1 + V_2$ 的一组基都落在 V_1 或 V_2 中.

特别地, 称满足 $V_1 \oplus V_2 = V$ 的 V_1 和 V_2 互为补空间. 注意补空间并不唯一, 也并不具有任何几何上的"正交性", 例如 $\mathbb{R}^2$ 中任意两个不共线的非零向量分别张成的一维子空间均互为补空间.

3 典型例题

Problem 3.1. *设*

$$A_0, A_1, \cdots, A_n \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}.$$

证明若 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 均分别包含奇数个元素, 则必定存在 $k \neq l$ 使得 $A_k \cap A_l$ 也包含奇数个元素.

证明. 令

$$\alpha_j(k) = \begin{cases} 1, & k \in A_j, \\ 0, & k \notin A_j \end{cases}, \qquad \alpha_j = (\alpha_j(1), \cdots, \alpha_j(n)) \in \mathbb{F}_2^n.$$

根据条件可知

$$\alpha_j^{\mathsf{T}} \alpha_j = 1, \forall j = 0, 1, \cdots, n.$$

利用反证法若对任意 $k \neq l$ 总有 $A_k \cap A_l$ 包含偶数个元素, 那么

$$\alpha_k^{\mathsf{T}} \alpha_l = 0, \forall k, l = 0, 1, \cdots, n, \; k \neq l.$$

令 $C = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{F}_2^{n \times (n+1)}$, 则有

$$C^{\mathsf{T}} C = \begin{pmatrix} \alpha_0^{\mathsf{T}} \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^{\mathsf{T}} \alpha_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^{\mathsf{T}} \alpha_0 & \cdots & \alpha_n^{\mathsf{T}} \alpha_n \end{pmatrix} = I_{n+1},$$

这蕴含着 C 可逆, 矛盾. □

Problem 3.2 (Wronskian)**.** 令 f_1, f_2, ..., $f_n \in C^{n-1}(X)$, $X \subseteq \mathbb{R}$. 定义

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \in C(X),$$

则 $W \not\equiv 0$ 蕴含着 f_1, f_2, ..., $f_n \in C^{n-1}(X)$ 线性无关.

证明. 记 $\tilde{W}(x)$ 为行列式 $W(x)$ 对应的 n 阶矩阵. 设

$$\sum_k a_k f_k = 0,$$

对其求各阶导数, 有

$$\sum_k a_k f_k^{(l)} = 0, \; l = 0, 1, \cdots, n-1,$$

即 $\tilde{W}(x)\alpha = 0$, $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)^{\mathsf{T}}$. 当 $W \not\equiv 0$ 时存在 $x_0 \in X$ 使得 $W(x_0) \neq 0$, 即相应的 $\tilde{W}(x_0)$ 为可逆矩阵, 那么必有 $\alpha = 0$. □

Remark 3.3. 逆命题不成立, 即 $W \equiv 0 \not\Rightarrow f_1$, f_2, ..., f_n 线性相关. 例如

$$f_1 = x^2, \; f_2 = x|x|, \; W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0,$$

但显然 f_1 和 f_2 线性无关.

Remark 3.4. 求导是判断充分光滑函数线性相关/无关的一个有效方式, 即利用导数给出更多等量关系.

Problem 3.5. 证明下列实数有理无关, 即看成 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间中的向量线性无关.

$$1, \sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{3^2}, \cdots, \sqrt[n]{3^{n-1}}.$$

证明. 若不然, 存在 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 满足 $f(\sqrt[n]{3}) = 0$. 于是

$$(f, x^n - 3) \neq 1,$$

这与 $(x^n - 3)$ 在 $\mathbb{Q}$ 中不可约矛盾. □

Problem 3.6. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 讨论

$$C(A) = \{X | XA - AX = 0\}$$

的维数和结构.

证明. 易知 $C(A)$ 为线性空间, 设 $P^{-1}AP = J$ 为其 Jordan 标准形, 那么

$$XA = AX \iff XPJP^{-1} = PJP^{-1}X \iff (P^{-1}XP)J = J(P^{-1}XP),$$

即 $X \mapsto P^{-1}XP$ 给出了 $C(A) \to C(J)$ 的一个线性同构, 故而不妨只考虑 $C(J)$. 对 X 的行/列按 J 的 Jordan 块位置进行划分, 有

$$X_{kl}J_l = J_kX_{kl}, \forall k, l.$$

记 $J_p = \lambda_pI + \varepsilon_pN_p$, 其中 $\varepsilon_p = 0$ 或 1. 代入可得

$$\lambda_lX_{kl} + \varepsilon_lX_{kl}N_l = \lambda_kX_{kl} + \varepsilon_kN_kX_{kl},\ X_{kl} \in \mathbb{C}^{n_k\times n_l}.$$

设 W_{kl} 为上式关于 X_{kl} 的解空间. 若 $\varepsilon_l = \varepsilon_k = 0$, 易知

$$\dim W_{kl} = \begin{cases} n_kn_l, & \lambda_l = \lambda_k, \\ 0, & \lambda_l \neq \lambda_k. \end{cases}$$

若 $\lambda_k = \lambda_l$, 设 $X_{kl} = (x_{ij})_{i=1,j=1}^{n_k,n_l}$, 那么

$$\varepsilon_k \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & \cdots & x_{1,n_l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_{n_k,1} & \cdots & x_{n_k,n_l-1} \end{pmatrix} = \varepsilon_l \begin{pmatrix} x_{21} & \cdots & x_{2,n_l} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n_k,1} & \cdots & x_{n_k,n_l} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $\varepsilon_k = \varepsilon_l = 1$ 时, $x_{i,j} = x_{i+1,j+1}$, $\forall i, j$. 对于其它情形易得如下关系:

$$\dim W_{kl} = \begin{cases} \frac{m(m+1)}{2}, & \varepsilon_k = \varepsilon_l = 1,\ m = \min(n_k, n_l), \\ n_k(n_l - 1), & \varepsilon_k = 1,\ \varepsilon_l = 0, \\ (n_k - 1)n_l, & \varepsilon_k = 0,\ \varepsilon_l = 1, \\ n_kn_l, & \varepsilon_k = \varepsilon_l = 0. \end{cases}$$

一般地, 对于 $\lambda_k \neq \lambda_l$, 情况复杂, 感兴趣的可参考 https://combgeo.org/wp-content/uploads/2020/04/Guterman_CentralisersQ20.pdf □

Remark 3.7. *$C(A)$ is called the centralizer of A. For any matrix A with different eigenvalues,* $\dim C(A) = n$, *$C(A) = \mathbb{F}[A]$. In general,*

$$\mathbb{F}[A] \subseteq C(A), \quad \mathbb{F}[A] = C(C(A)).$$

See https://math.stackexchange.com/questions/3330133/

Problem 3.8. *For subspaces $V_1, V_2 \subseteq V$, $V_1 + V_2$ is always a subspace. Furthermore, $V_1 \cup V_2$ is a subspace implies $V_1 \subseteq V_2$ or $V_2 \subseteq V_1$.*

证明. Otherwise let $v_1 \in V_1 \setminus V_2$ and $v_2 \in V_2 \setminus V_1$. Since $v_1 + v_2 \in V_1 \cup V_2$ by definition, we have $v_1 + v_2 \in V_1$ or V_2, which implies $v_2 \in V_1$ or $v_1 \in V_2$, contradiction. $\square$

Corollary 3.9. *The union of any 2 proper subspaces is never the whole space. Additionally, the proposition holds for finite unions as long as the underlying field is infinite.*

证明. Note that the the proposition may fail for infinite unions: $\mathbb{F}[x] = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{F}_k[x]$. For $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$, let $x \in V_1 \setminus 0$ and $y \in V \setminus V_1$, then

$$x + ay \in V \setminus V_1 \subseteq \bigcup_{k=2}^{n} V_k, \forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}.$$

Consequently there exist distinct a_1 and $a_2 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ such that $x + a_1 y$ and $x + a_2 y$ lie in the same V_k for $k > 1$. It follows that

$$(a_1 - a_2)y = (x + a_1 y) - (x + a_2 y) \in V_k$$

and thus

$$x = x + a_1 y - a_1 y = (x + a_1 y) - a_1(a_1 - a_2)^{-1}(a_1 - a_2)y \in V_k.$$

Since $x \in V_1 \setminus 0$ is arbitrary, we have $V_1 \subseteq \bigcup_{k=2}^{n} V_k$ and the contradiction immediately follows by induction on n. $\square$

Problem 3.10. 对比容斥原理,

- $k = 2$:
$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2);$$

- $k = 3$:
$$\begin{aligned}\dim(V_1 + V_2 + V_3) \le \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_1 \cap V_2)& \\ - \dim(V_2 \cap V_3) - \dim(V_3 \cap V_1) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)&.\end{aligned}$$

- $k > 3$ 时无类似结论. *(https://math.stackexchange.com/questions/1375583/)*

证明. 利用 $k = 2$ 时的维数公式,

$$\begin{aligned}\dim(V_1 + V_2 + V_3) &= \dim V_1 + \dim(V_2 + V_3) - \dim(V_1 \cap (V_2 + V_3)) \\ &= \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_2 \cap V_3) - \dim(V_1 \cap (V_2 + V_3)),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\dim(V_1 \cap (V_2 + V_3)) &\ge \dim((V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)) \\ &= \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \cap V_3) - \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3).\end{aligned}$$

$\square$

下面给出 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$ 的显示计算的相关理论. 设

$$V_1 = \operatorname{span}(\alpha_j)_{j=1}^{s}, \quad V_2 = \operatorname{span}(\beta_k)_{k=1}^{t}.$$

** 核心结论 **: 初等行变换不改变列向量的线性相关性.
求 V_1+V_2 的一组基只需给出

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$$

的一个极大无关子组即可. 做初等行变换

$$C=(A,B)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & \cdots & & & & \\ & & 1 & \cdots & & \\ & & & & 1 & \cdots \\ & 0 & & & & \end{pmatrix}=S,$$

其中每行第一个 "1" 所对应原位置的向量即为一个极大无关子组. 设可逆矩阵 P 满足 $PC=S$, 对于 $z\in V_1\cap V_2$, 必定存在 x 和 y 满足 $z=Ax=By$. 那么

$$C\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}=0\Rightarrow S\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}=0.$$

利用 S 的稀疏性给出关于 $(x,-y)$ 的解集, 在将 A 作用在所有的 x 上即得 $V_1\cap V_2$ 中所有元素.
算例:

$$V_1=\mathrm{span}((1,1,-1,2)^\mathsf{T},(2,-1,3,0)^\mathsf{T},(0,-3,5,-4)^\mathsf{T}),\ V_2=((1,2,2,1)^\mathsf{T},(4,-3,3,1)^\mathsf{T}).$$

做初等行变换:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & -1 & -3 & 2 & -3\\ -1 & 3 & 5 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5 & 2 & 3\\ & 5 & 5 & 3 & 7\\ & 2 & 2 & 4 & \\ & 6 & 6 & 5 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5 & 2 & 3\\ & 1 & 1 & 2 & \\ & & & -7 & 7\\ & & & -7 & 7\end{pmatrix},$$

得 α_1, α_2, β_1 为一个极大无关子组. 对于

$$S=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5 & 2 & 3\\ & 1 & 1 & 2 & \\ & & & -1 & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix},$$

得解空间的一组基为 $(2,-1,1,0,0)^\mathsf{T}$, $(-1,-2,0,1,1)^\mathsf{T}$.

$$V_1\cap V_2=\mathrm{span}(2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0,\ -\alpha_1-2\alpha_2=(-5,1,-5,-2)^\mathsf{T}),\ \dim(V_1\cap V_2)=1.$$

此处有退化的情形是由于

$$\dim V_1=\dim V_2=2,\ \dim(V_1\cap V_2)=1,\ \dim(V_1+V_2)=3.$$

Problem 3.11. 设 V 为 $\mathbb{F}_q$ 上的线性空间, V_1, V_2 和 V_3 均为互不相同的子空间, 满足

$$\dim V_1=\dim V_2=\dim V_3=n-1=\dim V-1.$$

讨论 $\dim(V_1+V_2)$, $\dim(V_1\cap V_2)$ 以及 $\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$.

证明. 由 $V_1 \neq V_2$ 知不妨设 $\alpha \in V_1 \setminus V_2 \neq \varnothing$. 那么由

$$\alpha \in (V_1 + V_2) \setminus V_2,\ V_2 \subseteq V_1 + V_2$$

知 $\dim(V_1 + V_2) > \dim V_2 = n - 1$, 故而 $\dim(V_1 + V_2) = n$. 由维数公式另有 $\dim(V_1 \cap V_2) = n - 2$. 再根据前一题的结论,

$$\dim(V_1 + V_2 + V_3) = n \leq 3(n-1) - 3(n-2) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

可知 $\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \geq n - 3$. 具体取值为 $(n-3)$ 或 $(n-2)$. 考虑 $V = \mathbb{F}_2^3$:

- $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \cap \langle \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle \cap \langle \varepsilon_3, \varepsilon_1 \rangle = 0$ 对应 $(n-3)$;
- $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \cap \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rangle \cap \langle \varepsilon_3, \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_1 \rangle$ 对应 $(n-2)$.

□