高等代数 (II) 第四次作业情况

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1　3 月 31 日作业

课程暂停.

2　4 月 4 日作业

题目 2.1. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, $(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)C$. 证明: $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性无关的充要条件是 C 可逆.

证明. 由线性无关的定义可知

$$\begin{aligned}
\beta_1, \cdots, \beta_s \text{ 线性无关} &\Leftrightarrow ((\beta_1, \cdots, \beta_s)X = 0 \Leftrightarrow X = 0) \\
&\Leftrightarrow ((\alpha_1, \cdots, \alpha_s)CX = 0 \Leftrightarrow X = 0) \\
&\Leftrightarrow (CX = 0 \Leftrightarrow X = 0) \\
&\Leftrightarrow C \text{ 可逆}.
\end{aligned}$$

□

P81: 6, 7, 9, 10, 11

3　4 月 7 日作业

P81: 2(2)(5)

P90: 2, 3, 4, 7, 10, 12

P90: 7. 只需说明 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$ 线性无关等价于 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_r}$, 其中 $\{x_k\}_{k=1}^{s}$ 为 A 的列向量组. 结论成立是因为

$$\sum_{k=1}^{r} u_k \beta_{j_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{r} u_k (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) x_{j_k} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \sum_{k=1}^{r} u_k x_{j_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{r} u_k x_{j_k} = 0,$$

故而 A 的列向量的极大线性无关组中元素与 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 中极大线性无关组元素相等.

P90: 10. 证明详见第四次讲义中 Corollary 3.9..

P90: 12. 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$ 作初等行变换得到

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故而可选择 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 作为 V_1+V_2 的一组基. 考虑其核空间的一组基 $(-1,-2,0,1,1)^{\mathsf{T}}$, $(2,-1,1,0,0)^{\mathsf{T}}$, 那么 $V_1\cap V_2$ 的一组基为 $\beta_1+\beta_2=(5,-1,5,2)^{\mathsf{T}}$.

4 4 月 11 日作业

题目 4.1. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 V_1 的一组基, $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V_2 的一组基, 证明 $\{\alpha_i\otimes_{\mathbb{F}}\beta_j\}_{i,j=1}^{m,n}$ 为 $V_1\otimes_{\mathbb{F}}V_2$ 的一组基.

证明. 显然 $V\otimes_{\mathbb{F}}W$ 的元素均可由 $\{\alpha_i\otimes_{\mathbb{F}}\beta_j\}_{i,j=1}^{m,n}$ 线性表出, 下证线性无关性.

法一: 只要证 $V\otimes_{\mathbb{F}}W$ 的维数为 mn. 构造双射

$$\begin{aligned}(V\otimes_{\mathbb{F}}W)^*&\to \mathrm{Hom}(V,W^*)\\ \phi&\mapsto(\alpha\mapsto(\beta\mapsto\phi(\alpha\otimes_{\mathbb{F}}\beta)))\\ ((\alpha\otimes_{\mathbb{F}}\beta)\mapsto\psi(\alpha)(\beta))&\leftarrow\!\shortmid\,\psi\end{aligned}$$

故

$$\dim(V\otimes W)=\dim(V\otimes W)^*=\dim\mathrm{Hom}(V,W^*)=\dim V\dim W^*=\dim V\dim W=mn.$$

法二: 利用 $V\otimes_{\mathbb{F}}W$ 作为商空间的定义方式, 设 $V\times W$ 为自由生成模, 令 R 为形如

$$(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w),\quad(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2),$$
$$(\lambda v,w)-\lambda(v,w),\quad(v,\lambda w)-\lambda(v,w)$$

的元素构成的子空间. 构造线性映射

$$\sigma:V\times W\to\mathbb{F}^{m\times n}$$
$$\sum_{l=1}^{N}c_l\left(\sum_{p=1}^{m}a_p^{(l)}\alpha_p,\sum_{q=1}^{n}b_q^{(l)}\beta_q\right)\mapsto\left(\sum_{l=1}^{N}c_la_p^{(l)}b_q^{(l)}\right)_{p,q},$$

其中 $V\times W$ 指代以 $V\times W$ 中全体元素生成的自由模. 显然 σ 为满射, 且 $R\subseteq\ker\sigma$. 反之

$$\sum_{l=1}^{N}c_l\left(\sum_{p=1}^{m}a_p^{(l)}\alpha_p,\sum_{q=1}^{n}b_q^{(l)}\beta_q\right)\in\ker\sigma\Rightarrow\sum_{l=1}^{N}c_la_p^{(l)}b_q^{(l)}=0,\,\forall p,q.$$

那么有

$$\sum_{l=1}^{N}c_l\left(\sum_{p=1}^{m}a_p^{(l)}\alpha_p,\sum_{q=1}^{n}b_q^{(l)}\beta_q\right)+R=\sum_{p,q}\sum_{l=1}^{N}c_la_p^{(l)}b_q^{(l)}(\alpha_p,\beta_q)+R=R,$$

由任意性可知 $\ker\sigma\subset R$, 故而 $\ker\sigma=R$. 由同构基本定理可知

$$V\otimes_{\mathbb{F}}W=(V\times W)/R\cong\mathbb{F}^{m\times n},\,\dim(V\otimes W)=\dim\mathbb{F}^{m\times n}=mn.$$

□

P91: 14, 16

P95: 3, 5, 6

P101: 2