高等代数 (II) 第五、六次作业情况

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1　4 月 14 日作业

P112: 3, 5, 7, 8, 9

P112: 9. 若不然, 不妨设

$$k_1\mathscr{A}^{n_1}\alpha + k_2\mathscr{A}^{n_2}\alpha + \cdots + k_s\mathscr{A}^{n_s}\alpha = 0$$

满足 $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_s \le m-1$ 且 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 均不为零. 于是有

$$0 = \mathscr{A}^{m-1-n_1}0 = \sum_{j=1}^{s} k_j\mathscr{A}^{m-1-n_1}\mathscr{A}^{n_j}\alpha = \sum_{j=1}^{s} k_j\mathscr{A}^{n_j-n_1-1}\mathscr{A}^{m}\alpha = k_1\mathscr{A}^{m-1}\alpha \ne 0,$$

矛盾. 另法: 若不然, 存在 $f \in \mathbb{F}[x]$ 满足

$$f(\mathscr{A})\alpha = 0, \quad \deg f < m.$$

结合 $\mathscr{A}^m\alpha = 0$ 可知 $(f, x^m)(\mathscr{A})\alpha = 0$. 而 x^m 的因式必为 x 的幂, 结合 $\deg f < m$ 可知存在 $l < m$ 使得 $\mathscr{A}^l\alpha = 0$, 这与 $\mathscr{A}^{m-1} \ne 0$ 矛盾.

P116: 3, 4, 5, 7

P116: 5

(1) $(\Rightarrow)$

$$A^2 = A \Rightarrow (A-I)A = 0 \Rightarrow \operatorname{im} B = \operatorname{im} A \subseteq \ker(A-I) \Rightarrow (A-I)B = 0.$$

$(\Leftarrow)$

$$AB = B \Rightarrow \operatorname{im} B = \operatorname{im} AB \subseteq \operatorname{im} A.$$

(2) $(\Rightarrow)$

$$A^2 = A \Rightarrow A(A-I) = 0 \Rightarrow \operatorname{im}(A-I) \subseteq \ker A = \ker B \Rightarrow B(A-I) = 0.$$

$(\Leftarrow)$

$$AB = A \Rightarrow \ker A = \ker AB \supseteq \ker B.$$

2　4 月 18 日作业

P121: 2, 5, 9, 12, 14

P136: 2, 3, 4, 5, 9

题目 2.1. *设 $V_i = \ker p_i^{e_i}(\mathscr{A})$, 记 $P_{V_i} : V = \bigoplus_i V_i \to V$ 为到 V_i 上的投影, 则 P_{V_i} 为 $\mathscr{A}$ 的多项式.*

证明. 记 $g_k(x)=\prod_{j\neq k}p_k^{e_k}(x)$, 由于 $(g_1,\cdots,g_s)=1$, 存在 $u_1,\cdots,u_s$ 使得 $\sum_k u_kg_k=1$. 对任意 $\alpha\in V$, 设 $\alpha_k=u_k(\mathscr{A})g_k(\mathscr{A})\alpha$, 则

$$\alpha=\sum_k u_k(\mathscr{A})g_k(\mathscr{A})\alpha=\sum_k\alpha_k,\ \alpha_k\in V_k.$$

故而设 $P_{V_i}=u_i(\mathscr{A})g_i(\mathscr{A})$ 即可. □

3 4 月 28 日作业

P139: 4

P147: 1(2), 2(4), 7, 8, 10

P152: 1, 2, 3

4 5 月 9 日作业

P159: 1(5)(6), 2, 7, 11, 12

题目 4.1. 刻画所有 n 阶方阵的相似分类的有理标准形.

题目 4.2. 求 $A=\begin{pmatrix}6&-3&-2\\4&-1&-2\\10&-5&-3\end{pmatrix}$ 的有理标准形.

题目 4.3. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^2=-I$, 求其有理标准形.