高等代数 (II) 第七次习题课

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1　内容概要

- 正交空间与辛空间.

2　补充知识

2.1　线性函数与对偶空间

设 $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$. 记 $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ 为 V 的对偶空间, 而 $f \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ 则称为 V 上的线性函数. 例如

- $\mathrm{Tr} : A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mapsto \mathrm{Tr}(A)$;
- $\int_a^b - \,\mathrm{d}x : f \in C[a,b] \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

类似地可定义双重对偶空间 $V^{**} := \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{F})$, 且我们有如下 "canonical embedding"

$$\begin{aligned} \varphi_V : V &\to V^{**} \\ v &\mapsto \langle (f \in V^*) \mapsto f(v) \rangle \quad (\text{ evaluation at } v) \end{aligned}$$

对于有限维线性空间 ($\dim V < \infty$), 由维数公式易得 $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$, 但对于一般的线性空间 V, φ_V 不一定为同构, 而一般称满足 φ_V 为同构的线性空间 V 为自反空间 (reflexive space). 例如 Hilbert 空间, Lebesgue 空间 L^p ($p \in (1, +\infty)$).

Proposition 2.1.1. $\mathrm{Hom}(V, -)$ *is a functor while* $\mathrm{Hom}(-, V)$ *is a contravariant functor on* $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$*, i.e., for any linear* $f : U \to W$*,*

- $\mathrm{Hom}(V, -)$ *give rise to a linear map* $\mathrm{Hom}(V, f) = f \circ - : \mathrm{Hom}(V, U) \to \mathrm{Hom}(V, W)$*;*
- $\mathrm{Hom}(-, V)$ *give rise to a linear map* $\mathrm{Hom}(f, V) = - \circ f : \mathrm{Hom}(U, V) \leftarrow \mathrm{Hom}(W, V)$*.*

For $V = \mathbb{F}$*,* $f : U \to W$ *induces a linear map between dual spaces* $f^* := \mathrm{Hom}(f, \mathbb{F}) : W^* \to U^*$*.*

2.2　正交空间与辛空间

Definition 2.2.1 (bilinear forms)**.** *Let* $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$*.* $f : V \times V \to \mathbb{F}$ *is called a bilinear form if both* $f(-, v) \in V^*$ *and* $f(v, -) \in V^*$ *for all* $v \in V$*. A bilinear form may have the following properties:*

- *symmetric:* $f(v, w) = f(w, v)$ *for all* $v, w \in V$*;*

- *skew-symmetric: $f(v,w)=-f(w,v)$ for all $v,w\in V$;*
- *alternate: $f(v,v)=0$ for all $v\in V$;*

事实上上述双线性函数诱导了两个 $V\to V^*$ 的线性映射, 分别记为

$$\begin{aligned}\psi_L &: v\mapsto f(v,-);\\ \psi_R &: v\mapsto f(-,v).\end{aligned}$$

而 ψ_L 和 ψ_R 的核空间恰好分别由 f 的左根和右根组成, 即 $\ker\psi_L=\mathrm{rad}_L V$, $\ker\psi_R=\mathrm{rad}_R V$. 称 f 为非退化 (non-degenerate) 的, 若 $\mathrm{rad}_L V=\mathrm{rad}_R V=0$.

Definition 2.2.2. *设 f 为线性空间 $V\in\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ 上的双线性函数. 称 (V,f) 为一个正交空间 (orthogonal)/辛空间 (symplectic), 若 f 为对称的/反对称的. 特别地, 若 f 为非退化的, 则称 (V,f) 为非退化的正交空间/辛空间.*

对于有限维线性空间 V, 固定 V 上的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 则对任意 $u=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X\in V$, $X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{F}^n$, $v=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Y\in V$, $Y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{F}^n$, 有

$$f(u,v)=f\left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j,\sum_{k=1}^n y_k\alpha_k\right)=\sum_{j,k=1}^n x_jy_kf(\alpha_j,\alpha_k)=X^{\mathsf{T}}AY,\ A=(f(\alpha_j,\alpha_k))_{j,k}.$$

故而 f 的对称性, 反对称性, 非退化性等性质都可以用矩阵 A 的性质来刻画, 且容易验证这样的性质与基的选取无关.

2.3 正交变换与辛变换

设 (V,f) 为 $\mathbb{F}$ 上的有限维非退化正交空间/辛空间. 称 $\mathscr{T}\in\mathrm{End}(V)$ 为 V 上的一个正交变换/辛变换, 若

$$f(\mathscr{T}(u),\mathscr{T}(v))=f(u,v),\ \forall u,v\in V.$$

同样地固定 V 上的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 记 f 对应的度量矩阵为 A, $\mathscr{T}$ 在这组基下的矩阵表示为 T, 那么有

$$T^{\mathsf{T}}AT=A,$$

且当 f 为非退化时 A 可逆, 这蕴含着 $\det(T)=\pm1$.

Lemma 2.3.1. *设 $V\in\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$, $\mathrm{Char}\,\mathbb{F}\neq 2$, $\dim V=n$. f 为 V 上的斜对称双线性函数, 则存在 V 的一组基*

$$\delta_1,\delta_{-1},\cdots,\delta_r,\delta_{-r},\eta_1,\cdots,\eta_s$$

满足

$$\begin{aligned}f(\delta_j,\delta_{-k})&=\delta_{jk},\ j,k=1,2,\cdots,r,\\ f(\alpha,\eta_k)&=0,\ \forall\alpha\in V.\end{aligned}$$

一般称满足这样条件的基为一组辛基.

证明. 利用数学归纳法, 对于 $f\neq0$ 证明存在两个线性无关的向量满足上述部分条件, 过程参见教材 P171-172. □

Lemma 2.3.2. *设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 为斜对称矩阵, $\operatorname{Char}\mathbb{F}\neq 2$, 则存在 $c\in\mathbb{F}$ 使得 $\det(A)=c^2$.*

证明. 不妨仅考虑 A 为非退化 (可逆) 的情形. 取定 V 上的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 令

$$f\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X,(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Y\right)=X^{\mathsf T}AY,\ X,Y\in\mathbb{F}^n,$$

容易验证 f 为双线性斜对称函数, 由前述引理则存在 V 上的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 使得 f 在这一组基下的表示为

$$B=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},0\cdots,0\right\}.$$

记两组基之间的过度矩阵为 P, 即

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P,$$

那么

$$\begin{aligned}X^{\mathsf T}BY&=f\left((\beta_1,\cdots,\beta_n)X,(\beta_1,\cdots,\beta_n)Y\right)\\&=f\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)PX,(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)PY\right)\\&=(PX)^{\mathsf T}A(PY)=X^{\mathsf T}(P^{\mathsf T}AP)Y,\ \forall X,Y\in\mathbb{F},\end{aligned}$$

故 $B=P^{\mathsf T}AP$. 由 P 可逆可知

$$\det(A)=\det(P)^{-2}\det(B)=\left(\det(P)\det(B)\right)^2.$$

□

Theorem 2.3.3. *令*

$$A=\begin{pmatrix}0&I_m\\-I_m&0\end{pmatrix},$$

称满足 $T^{\mathsf T}AT=A$ 的矩阵 $T\in\mathbb{F}^{2m\times 2m}$ 为辛矩阵. 则若 $\operatorname{Char}\mathbb{F}\neq 2$ 必有 $\det(T)=1$.

证明. 对于多项式环 $R=\mathbb{F}[x_{11},\cdots,x_{2m,2m}]$ 上的斜对称矩阵

$$G=\begin{pmatrix}0&x_{12}&\cdots&x_{1,2m}\\-x_{12}&0&\cdots&x_{2,2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-x_{1,2m}&-x_{2,2m}&\cdots&0\end{pmatrix}\in M_{2m}(R),$$

可以看作分式域 $\operatorname{Frac}(R)$ 上的矩阵, 且由 $\operatorname{Char}\mathbb{F}\neq 2$ 可知 $\operatorname{Char}\operatorname{Frac}(R)\neq 2$, 那么根据前述引理存在 $f=g/h\in\operatorname{Frac}(R)$ 满足

$$\det(G)=f^2=g^2/h^2,\ g,h\in R.$$

不妨令 $(g,h)=1$, 则由 $\det(G)\in R$ 可知 $h\mid g^2$, 因此 $h\mid g$, 从而 $f=f(x_{12},\cdots,x_{2m,2m-1})\in R$, 即 $\det(G)$ 总可表示为 R 中某一元素的平方. 对任意 $S\in M_{2m}(R)$, 容易验证 $S^{\mathsf T}GS$ 也为斜对称矩阵. 记

$$f_S=f\left((S^{\mathsf T}GS)_{12},\cdots,(S^{\mathsf T}GS)_{2m,2m-1}\right)\in R,$$

那么

$$f_S^2=\det(S^{\mathsf T}GS)=(\det S)^2\det(G)=(\det S)^2f^2.$$

下证 $f_S = f\det S$. 若不然, 必有 $f_S = -f\det S$, 此时令 $S = I_{2m} \in M_{2m}(R)$ 可得 $f = f_I = -f$, 这与 $\operatorname{Char}\mathbb{F} \neq 2$ 矛盾, 因此 $f_S = f\det S$. 特别地, 取 $S = T$ 有 $f_T = f\det(T)$, 再令 G 中未知项取合适的值使得 $G = A$, 那么

$$f(A_{12}, \cdots, A_{2m,2m-1}) = f_T = f(A_{12}, \cdots, A_{2m,2m-1})\det(T),$$

其中 $f(A_{12}, \cdots, A_{2m,2m-1})^2 = \det(A) \neq 0$, 因此 $\det(T) = 1$. □

Theorem 2.3.4. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

称满足 $T^{\mathsf{T}}AT = A$ 的矩阵 $T \in \mathbb{F}^{2m\times 2m}$ 为辛矩阵, 则必有 $\det(T) = 1$.

证明. 显然 T 和 A 都是可逆矩阵. 由 $T^{\mathsf{T}}AT = A$ 可知 $T^{\mathsf{T}} = AT^{-1}A^{-1}$, 那么 $T \sim T^{\mathsf{T}} \sim T^{-1}$, 于是 $\lambda(T) = \lambda(T^{-1})$, 即 T 有代数重数为 n_s 的特征值 $\lambda_s \in \mathbb{F}'$ 等价于 T 有代数重数为 n_s 的特征值 $\lambda_s^{-1} \in \mathbb{F}'$, 其中 $\mathbb{F}'$ 为 $\mathbb{F}$ 的代数扩张 (包含所有关于 $\mathbb{F}$ 的代数数). 由归纳法不难得到 $\det(T) = (-1)^q$, 其中 $q \geq 0$ 为 T 关于特征值 (-1) 的代数重数 (约定 $(T+I)$ 可逆时 $q = 0$). 我们只需判断 $\dim\ker(T+I)^{2m}$ 的奇偶性即可.

$$\begin{aligned}
\dim\ker(T+I)^{2m} &= 2m - \operatorname{rank}(T+I)^{2m} \\
&= 2m - \operatorname{rank} AT^{-m}(T+I)^m(T+I)^m \\
&= 2m - \operatorname{rank} A(T^{-1}+I)^m(T+I)^m \\
&= 2m - \operatorname{rank}(T^{\mathsf{T}}+I)^m A(T^{-1}+I)^m
\end{aligned}$$

为偶数, 因此 $\det(T) = 1$. □

3 典型例题

Problem 3.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中定义双线性函数

$$f((x_1,x_2)^{\mathsf{T}}, (y_1,y_2)^{\mathsf{T}}) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

证明

- $(\mathbb{R}^2, f)$ 为非退化的正交空间, 并求出 f 在基 $e_1 = (1,0)^{\mathsf{T}}$, $e_2 = (0,1)^{\mathsf{T}}$ 下的度量矩阵.
- 若变换 $\mathscr{T}$ 在基 e_1, e_2 下的矩阵表示为

  $$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

  则 $\mathscr{T}$ 为正交变换.
- 若 $\mathscr{T}$ 为正交变换, 给出矩阵表示 T 的具体形式.

证明. 由

$$f((x_1,x_2)^{\mathsf{T}}, (y_1,y_2)^{\mathsf{T}}) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

易知 f 为非退化双线性函数, 且由

$$f(e_1,e_1)=1,\ f(e_1,e_2)=f(e_2,e_1)=0,\ f(e_2,e_2)=-1$$

可知度量矩阵为 $\mathrm{diag}(1,-1)$. 再证 $\mathscr{T}$ 为正交变换, 记 A 为 f 关于基 e_1, e_2 的度量矩阵. 直接验证

$$T^{\mathsf{T}}AT=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=A.$$

反之若 $\mathscr{T}$ 为正交变换, 则 $T^{\mathsf{T}}AT=A$, 即

$$\begin{pmatrix}T_{11} & T_{21}\\ T_{12} & T_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

展开可得

$$\begin{aligned}T_{11}^2-T_{21}^2&=1,\\ T_{12}^2-T_{22}^2&=-1,\\ T_{11}T_{12}-T_{21}T_{22}&=0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}T_{11}^2&=T_{21}^2+1,\\ T_{12}^2&=T_{22}^2-1,\\ T_{11}T_{12}&=T_{21}T_{22},\end{aligned}$$

将前两个式子相乘, 结合最后一个式子可得

$$T_{11}^2T_{12}^2=T_{21}^2T_{22}^2+T_{22}^2-T_{21}^2-1\Rightarrow T_{22}^2=T_{21}^2+1.$$

再结合第二个式子有 $T_{21}^2=T_{12}^2$, 于是 $T_{11}^2=T_{22}^2$. 故满足条件的 T 形如下列几种形式之一:

$$\begin{pmatrix}t & \sqrt{t^2-1}\\ \sqrt{t^2-1} & t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-t & -\sqrt{t^2-1}\\ \sqrt{t^2-1} & t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}t & \sqrt{t^2-1}\\ -\sqrt{t^2-1} & -t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-t & -\sqrt{t^2-1}\\ -\sqrt{t^2-1} & -t\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}t & -\sqrt{t^2-1}\\ \sqrt{t^2-1} & -t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}t & -\sqrt{t^2-1}\\ -\sqrt{t^2-1} & t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-t & \sqrt{t^2-1}\\ \sqrt{t^2-1} & -t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-t & \sqrt{t^2-1}\\ -\sqrt{t^2-1} & t\end{pmatrix}.$$

但实际上第一个和第七个是同一类, 第二个和第五个是同一类, 第三个和第八个是同一类, 第四个和第六个是同一类, 因此只有如下四种形式:

$$\begin{pmatrix}t & \sqrt{t^2-1}\\ \sqrt{t^2-1} & t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}t & -\sqrt{t^2-1}\\ -\sqrt{t^2-1} & t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}t & -\sqrt{t^2-1}\\ \sqrt{t^2-1} & -t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}t & \sqrt{t^2-1}\\ -\sqrt{t^2-1} & -t\end{pmatrix}.$$

$\square$

Problem 3.2. *在 $\mathbb{R}^2$ 中定义双线性函数*

$$f((x_1,x_2)^{\mathsf{T}},(y_1,y_2)^{\mathsf{T}})=x_1y_2-x_2y_1.$$

证明

- $(\mathbb{R}^2, f)$ 为非退化的辛空间, 并求出 f 在基 $e_1 = (1,0)^\mathsf{T}$, $e_2 = (0,1)^\mathsf{T}$ 下的度量矩阵.
- 若变换 $\mathscr{T}$ 在基 e_1, e_2 下的矩阵表示为 T, 则 $\mathscr{T}$ 为辛变换当且仅当 $\det(T) = 1$.

证明. 由

$$f((x_1,x_2)^\mathsf{T}, (y_1,y_2)^\mathsf{T}) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

易知 f 为非退化双线性函数, 且由

$$f(e_1,e_1) = 0,\ f(e_1,e_2) = 1,\ f(e_2,e_2) = 0$$

可知 e_1, e_2 恰好构成一组辛基, 度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 若 $\mathscr{T}$ 为正交变换, 则

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

展开可得

$$T_{11}T_{22} = T_{12}T_{21} + 1,$$

这等价于 $\det(T) = 1$. □

Problem 3.3. 设 $\mathbb{F}$ 为数域, 辛空间 $(\mathbb{F}^5, f)$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

求一组辛基.

证明. 取 $\delta_1 = \alpha_1$, $\xi_1 = \alpha_2$, 那么有 $f(\delta_1, \xi_1) = 1 \neq 0$. 下面求适当的 δ_{-1} 使得 $f(\delta_1, \delta_{-1}) = 1$. 这可通过直接变形

$$1 = f(\delta_1,\xi_1)^{-1} f(\delta_1,\xi_1) = f\left(\delta_1, f(\delta_1,\xi_1)^{-1}\xi_1\right),$$

令 $\delta_{-1} = f(\delta_1,\xi_1)^{-1}\xi_1 = \alpha_2$ 即可. 将 δ_1, δ_{-1} 扩充为 F^5 的一组基:

$$\delta_1, \delta_{-1}, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5.$$

现在需要找适当的 $\beta_3, \beta_4, \beta_5$ 使得他们与 $\delta_{\pm 1}$ 正交且

$$\delta_1, \delta_{-1}, \beta_3, \beta_4, \beta_5$$

仍然为 $\mathbb{F}^5$ 的一组基. 直接取

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{f(\alpha_3,\delta_1)}{f(\delta_{-1},\delta_1)}\delta_{-1} - \frac{f(\alpha_3,\delta_{-1})}{f(\delta_1,\delta_{-1})}\delta_1\\ &= \alpha_3 - \frac{1}{-1}\alpha_2 - \frac{2}{1}\alpha_1 = -2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3;\\ \beta_4 &= \alpha_4 - \frac{f(\alpha_4,\delta_1)}{f(\delta_{-1},\delta_1)}\delta_{-1} - \frac{f(\alpha_4,\delta_{-1})}{f(\delta_1,\delta_{-1})}\delta_1\\ &= \alpha_4 - \frac{-2}{-1}\alpha_2 - \frac{-1}{1}\alpha_1 = \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4;\\ \beta_5 &= \alpha_5 - \frac{f(\alpha_5,\delta_1)}{f(\delta_{-1},\delta_1)}\delta_{-1} - \frac{f(\alpha_5,\delta_{-1})}{f(\delta_1,\delta_{-1})}\delta_1\\ &= \alpha_5 - \frac{-4}{-1}\alpha_2 - \frac{3}{1}\alpha_1 = -3\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_5.\end{aligned}$$

在子空间 $\operatorname{span}(\beta_3,\beta_4,\beta_5)$ 寻求一合适的 δ_2 和 ξ_2 使得 $f(\delta_2,\xi_2)\neq 0$. 例如可取 $\delta_2=\beta_3$, $\xi_2=\beta_4$, 有

$$f(\delta_2,\xi_2) = (-2,1,1,0,0)A(1,-2,0,1,0)^{\mathsf{T}} = -4 \neq 0.$$

类似前述构造, 可令

$$\delta_{-2} = f(\delta_2,\xi_2)^{-1}\xi_2 = -\frac{1}{4}\beta_4 = -\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_4.$$

最后取

$$\begin{aligned}\eta_1=\gamma_5 &= \beta_5 - \frac{f(\beta_5,\delta_1)}{f(\delta_{-1},\delta_1)}\delta_{-1} - \frac{f(\beta_5,\delta_{-1})}{f(\delta_1,\delta_{-1})}\delta_1 - \frac{f(\beta_5,\delta_2)}{f(\delta_{-2},\delta_2)}\delta_{-2} - \frac{f(\beta_5,\delta_{-2})}{f(\delta_2,\delta_{-2})}\delta_2\\ &= \beta_5 - \frac{f(\beta_5,\delta_2)}{f(\delta_{-2},\delta_2)}\delta_{-2} - \frac{f(\beta_5,\delta_{-2})}{f(\delta_2,\delta_{-2})}\delta_2\\ &= \beta_5 - \frac{11}{-1}\delta_{-2} - \frac{11/4}{1}\delta_2 = -\frac{1}{4}\alpha_1-\frac{5}{4}\alpha_2-\frac{11}{4}\alpha_3-\frac{11}{4}\alpha_4+\alpha_5.\end{aligned}$$

另法: 观察 A 的形式可设

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ -2&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ -3&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

则有

$$P_1AP_1^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0&1&-1&2&4\\ -1&0&-2&1&-3\\ 1&0&2&-5&-8\\ -2&0&0&2&5\\ -4&0&3&-7&-12 \end{pmatrix} P_1^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0&1&-1&2&4\\ -1&0&0&0&0\\ 1&0&0&-4&-11\\ -2&0&4&0&11\\ -4&0&11&-11&0 \end{pmatrix}.$$

记 $A_1=P_1AP_1^{\mathsf{T}}$, 再令

$$P_{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&-2&0&1&0\\ 0&-4&0&0&1 \end{pmatrix},$$

则有

$$P_{-1}A_1P_{-1}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & -11 & 0 \end{pmatrix}.$$

接下来设 $A_{-1} = P_{-1}A_1P_{-1}^{\mathsf{T}}$, 并取

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11/4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

那么有

$$P_2A_{-1}P_2^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后令 $A_2 = P_2A_{-1}P_2^{\mathsf{T}}$,

$$P_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11/4 & 1 \end{pmatrix},$$

有

$$P_{-2}A_2P_{-2}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

归一化: 取 $Q = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1/4, 1)$. 综上所述,

$$QP_{-2}P_2P_{-1}P_1AP_1^{\mathsf{T}}P_{-1}^{\mathsf{T}}P_2^{\mathsf{T}}P_{-2}^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

只需令

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)P_1^{\mathsf{T}}P_{-1}^{\mathsf{T}}P_2^{\mathsf{T}}P_{-2}^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}} = (\delta_1, \delta_{-1}, \delta_2, \delta_{-2}, \eta_1)$$

则 $\delta_1, \delta_{-1}, \delta_2, \delta_{-2}, \eta_1$ 构成一组辛基. 而

$$QP_{-2}P_2P_{-1}P_1 = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/4 & -11/4 & -11/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & -5/4 & -11/4 & -11/4 & 1 \end{pmatrix},$$

得一组辛基为

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \alpha_1 \\ \delta_{-1} &= \alpha_2 \\ \delta_2 &= -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \delta_{-2} &= -\frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_4 \\ \eta_1 &= -\frac{1}{4}\alpha_1 - \frac{5}{4}\alpha_2 - \frac{11}{4}\alpha_3 - \frac{11}{4}\alpha_4 + \alpha_5. \end{aligned}$$

$\square$