高等代数 (II) 第七次作业情况

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1　5 月 12 日作业

P165: 5, 6, 7, 8

$$
\begin{tikzcd}
& V_1 \arrow[rr, "\mathscr{A}"] \arrow[dd, "T_\beta"] & & V_2 \arrow[dd, "T_\eta"] \\
V_1 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "\mathscr{A}"] \arrow[dd, "T_\alpha"'] & & V_2 \arrow[ur, "1"] \arrow[dd, "T_\xi"] & \\
& \mathbb{F}^n \arrow[rr, "QAP^{-1}"] & & \mathbb{F}^m \\
\mathbb{F}^n \arrow[ur, "1_{\alpha,\beta}=P"] \arrow[rr, "A"] & & \mathbb{F}^m \arrow[ur, "1_{\xi,\eta}=Q"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& V_1^* \arrow[dl, "1^*"'] & & V_2^* \arrow[ll, "\mathscr{A}^*"'] \arrow[dl, "1^*"'] \\
V_1^* & & V_2^* \arrow[ll, "\mathscr{A}^*"'] & \\
& \mathbb{F}^{n*} \arrow[uu, "T_\beta^*"] \arrow[dl, "1_{\alpha,\beta}^*=P^\mathsf{T}"'] & & \mathbb{F}^{m*} \arrow[uu, "T_\eta^*"'] \arrow[ll, "P^{-\mathsf{T}}A^\mathsf{T}Q^\mathsf{T}"'] \arrow[dl, "1_{\xi,\eta}^*=Q^\mathsf{T}"'] \\
\mathbb{F}^{n*} \arrow[uu, "T_\alpha^*"] & & \mathbb{F}^{m*} \arrow[ll, "A^\mathsf{T}"'] \arrow[uu, "T_\xi^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

题目 1.1. 设 $f: V \to W$ 在一组基下的矩阵表示为 A, 证明 f^* 在对偶基下的矩阵表示为 A^T.

证明. 设 $A = (a_{ij})_{ij}$, f^* 的矩阵表示为 $B = (b_{ij})_{ij}$. 根据矩阵表示的定义,

$$f^*(\beta_k^*) = \sum_{l=1}^n b_{lk}\alpha_l^*, \ \forall k, l.$$

将等式两边同时作用于 α_s 有

$$f^*(\beta_k^*)(\alpha_s) = \beta_k^*(f(\alpha_s)) = \beta_k^*\left(\sum_{l=1}^n a_{ls}\beta_l\right) = \sum_{l=1}^n a_{ls}\beta_k^*(\beta_l) = a_{ks}$$

$$\sum_{l=1}^n b_{lk}\alpha_l^*(\alpha_s) = b_{sk}.$$

由指标 k 和 s 任意性可知 $B = A^\mathsf{T}$.

另法: 设 $u \in \mathbb{F}^m$, 有

$$f^*((\beta_1^*, \cdots, \beta_m^*)u)(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1^*, \cdots, \beta_m^*)u(f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = u^\mathsf{T}(\beta_1^*, \cdots, \beta_m^*)^\mathsf{T}(\beta_1, \cdots, \beta_m)A = u^\mathsf{T}A.$$

注意到对任意 $v \in \mathbb{F}^n$,

$$(\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*)v(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = v^\mathsf{T}(\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*)^\mathsf{T}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = v^\mathsf{T},$$

那么

$$f^*((\beta_1^*, \cdots, \beta_m^*)u)(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = u^\mathsf{T}A = (\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*)A^\mathsf{T}u(\alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

即
$$f^*((\beta_1^*,\cdots,\beta_m^*)u)=A^\mathsf{T}u.$$
□

2 5 月 16 日作业

题目 2.1. 设 V_1 的两组基 $\{\alpha_p\}_{p=1}^n$ 和 $\{\alpha_p'\}_{p=1}^n$ 满足 $(\alpha_1',\cdots,\alpha_n')=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$; V_2 的两组基 $\{\beta_q\}_{q=1}^m$ 和 $\{\beta_q'\}_{q=1}^m$ 满足 $(\beta_1',\cdots,\beta_m')=(\beta_1,\cdots,\beta_m)Q$. 若 $\varphi: V_1\times V_2\to\mathbb{F}$ 在基 $\{\alpha_p\}_{p=1}^n,\{\beta_q\}_{q=1}^m$ 下的矩阵表示为 G, 求证 φ 在基 $\{\alpha_p'\}_{p=1}^n,\{\beta_q'\}_{q=1}^m$ 下的矩阵表示为 $P^\mathsf{T}GQ$.

证明. 对任意指标 p 和 q 有
$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_p',\beta_q')&=\varphi\left(\sum_{k=1}^n P(k,p)\alpha_k,\sum_{l=1}^m Q(l,q)\alpha_l\right)\\&=\sum_{k=1}^n P(k,p)\sum_{l=1}^m Q(l,q)\varphi(\alpha_k,\alpha_l)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m P^\mathsf{T}(p,k)G(k,l)Q(l,q)=P^\mathsf{T}GQ(p,q).\end{aligned}$$
□

题目 2.2. 设 V_1 和 V_2 的基分别为 $\{\alpha_p\}_{p=1}^n$ 和 $\{\beta_q\}_{q=1}^m$, $\varphi: V_1\times V_2\to\mathbb{F}$. 写出 $R_\varphi(\beta_1),\cdots,R_\varphi(\beta_n)$ 与 $\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*$ 之间的过渡矩阵.

证明. 设所求的过渡矩阵为 $A=(a_{ij})_{ij}$, 则根据定义有
$$R_\varphi(\beta_q)=\sum_{p=1}^n a_{pq}\alpha_p^*.$$
等式两边同时作用于 α_s 上可得
$$\varphi(s,q)=R_\varphi(\beta_q)(\alpha_s)=\sum_{p=1}^n a_{pq}\alpha_p^*(\alpha_s)=a_{sq},$$
故所求的过渡矩阵与 φ 的矩阵表示一致. □

3 5 月 19 日作业

题目 3.1. 设 $\sigma\in\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V_1 的一组基. 求证 σ 为等距同构当且仅当 $(\sigma\alpha_k,\sigma\alpha_l)=(\alpha_k,\alpha_l)$, $\forall k,l$, 且 σ 为双射.

证明. 充分性是显然的, 下证必要性. 对任意 $u,v\in V_1$, 设
$$u=\sum_{p=1}^n x_p\alpha_p,\quad v=\sum_{q=1}^n y_q\alpha_q.$$

那么

$$\begin{aligned}\sigma(u,v) &= \sigma\left(\sum_{p=1}^{n} x_p\alpha_p, \sum_{q=1}^{n} y_q\alpha_q\right)\\ &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} x_p y_q \sigma(\alpha_p,\alpha_q)\\ &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} x_p y_q (\alpha_p,\alpha_q)\\ &= \left(\sum_{p=1}^{n} x_p\alpha_p, \sum_{q=1}^{n} y_q\alpha_q\right) = (u,v).\end{aligned}$$

□

题目 3.2. *设 $\sigma : V_1 \to V_2$ 为非退化正交空间之间的线性映射. 求证则 σ 为等距同构当且仅当 σ 为双射且 $(\sigma\alpha,\sigma\alpha) = (\alpha,\alpha)$, $\forall\alpha \in V_1$.*

证明. 充分性是显然的, 下证必要性. 对任意 $u, v \in V_1$, 有

$$\begin{aligned}(\sigma u,\sigma v) &= \frac{1}{4}((\sigma(u+v),\sigma(u+v)) - (\sigma(u-v),\sigma(u-v)))\\ &= \frac{1}{4}((u+v,u+v) - (u-v,u-v)) = (u,v).\end{aligned}$$

□

题目 3.3. *设 $\sigma : V \to V$ 为非退化度量空间上的线性变换, $\sigma^* : V \to V$ 为相应的伴随变换. 求证*

1. σ 为等距变换当且仅当 σ 为双射且 $\sigma\sigma^* = \mathrm{id}$;

2. 若 σ 为等距变换, U 为 σ-不变子空间, 则 $U^\perp$ 也为 σ-不变子空间.

证明. 若 σ 为等距变换, 根据定义对任意 $u, v \in V$ 有

$$(u,v) = (\sigma\sigma^{-1}u, v) = (\sigma^{-1}u, \sigma^* v) = (u, \sigma\sigma^* v).$$

由于 V 非退化, 结合 u 和 v 的任意性即有 $\sigma\sigma^* = \mathrm{id}$. 反之当 σ 为双射而 $\sigma\sigma^* = \mathrm{id}$ 时有 $\sigma^* = \sigma^{-1}$, 那么对任意 $u, v \in V$ 有

$$(\sigma u, \sigma v) = (u, \sigma^*\sigma v) = (u, \sigma^{-1}\sigma v) = (u,v).$$

当 σ 为等距变换时, 任取 $\alpha \in U^\perp$, 根据定义有

$$(\alpha, u) = 0, \ \forall u \in U.$$

于是

$$(\sigma\alpha, u) = (\alpha, \sigma^{-1}u), \ \forall u \in U,$$

即 $\sigma\alpha \in (\sigma^{-1}U)^\perp$. 当 V 为有限维空间时 U 也为有限维空间, 那么 $\sigma(U) \subseteq U$ 蕴含着 $\sigma(U) = U$, 即 $\sigma^{-1}(U) = U$, 结合 α 的任意性故有 $U^\perp$ 为 σ-子空间. 事实上当 $\dim V = \infty$ 时这一结论可能不成立, 例如

$$\begin{aligned}\sigma : \ell^2 &\to \ell^2\\ (a_k)_{k=-\infty}^{\infty} &\mapsto (a_{k-1})_{k=-\infty}^{\infty}.\end{aligned}$$

那么对任意整数 s,

$$W_s = \{(a_k)_{k=-\infty}^{\infty} \mid a_k = 0, \forall k < s\}$$

均为 σ-不变子空间. 易知

$$W_s^{\perp} = \{(a_k)_{k=-\infty}^{\infty} \mid a_k = 0, \forall k \geq s\},$$

但显然 $W_s^{\perp}$ 不能成为 σ-子空间. □

题目 3.4. *证明辛矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 满足 $f(\lambda) = \lambda^{2m} f(\lambda^{-1})$, 进而若 λ_0 为 $f(\lambda)$ 的根, 则 λ_0^{-1} 也为根.*

证明. 记 $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, 那么根据辛矩阵的定义有 $A^{\mathsf{T}} J A = J$. 显然 A 和 J 均为可逆矩阵, 于是 $A^{\mathsf{T}} = JA^{-1}J^{-1}$, 即 $A \sim A^{\mathsf{T}} \sim A^{-1}$, 立即有 $f(\lambda) = \lambda^{2m} f(\lambda^{-1})$. □

4 5 月 23 日作业

以下均设 V 为度量空间.

题目 4.1. *设 $V = N \oplus S$, 其中 N 为零内积子空间.*

1. 证明 $N = \operatorname{Rad} V$ 当且仅当 S 非退化;

2. 若 S 非退化, 则 S 与 $V/\operatorname{Rad} V$ 等距同构.

证明. 当 $N = \operatorname{Rad} V$ 时 $V = \operatorname{Rad} V \oplus S$. 取 $v \in \operatorname{Rad} S = S \cap S^{\perp}$. 由于 $v \in S^{\perp}$ 而 $V = \operatorname{Rad} V \oplus S$, 必有 $v \in V^{\perp} = \operatorname{Rad} V$, 于是 $v \in \operatorname{Rad} V \cap S = 0$, 即 $v = 0$. 由 v 的任意性知 $\operatorname{Rad} S = 0$, 故 S 非退化. 反之当 S 非退化时有 $\operatorname{Rad} S = S \cap S^{\perp} = 0$. 由于 N 为零内积子空间, N 中任意向量与 N 和 S 都正交, 那么有 $N \subseteq V^{\perp} = \operatorname{Rad} V$. 而对任意 $v \in \operatorname{Rad} V = V^{\perp}$, 设 $v = v_1 + v_2$ 满足 $v_1 \in N$, $v_2 \in S$, 那么对任意 $w \in S$ 有

$$(v_2, w) = (v - v_1, w) = (v, w) - (v_1, w) = 0 - 0 = 0,$$

即 $v_2 \in S \cap S^{\perp} = \operatorname{Rad} S = 0$, 故 $v = v_1 \in N$, 由 v 的任意性可知 $\operatorname{Rad} V \subseteq N$. 至此充要性得证.

当 S 非退化时 $V = \operatorname{Rad} V \oplus S$, 构造映射

$$\sigma : V/\operatorname{Rad} V \to S,\ v + \operatorname{Rad} V \mapsto v_2,$$

其中 $v = v_1 + v_2$, 满足 $v_1 \in \operatorname{Rad} V$, $v_2 \in S$. 首先说明其良定义性. 设

$$v + \operatorname{Rad} V = v' + \operatorname{Rad} V, \quad v = v_1 + v_2,\ v' = v_1' + v_2',\ v_1, v_1' \in \operatorname{Rad} V,\ v_2, v_2' \in S,$$

根据定义有

$$(v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') = v - v' \in \operatorname{Rad} V,$$

由于 $v - v'$ 的直和分解唯一, 必有 $v_2 - v_2' = 0$, 良定义性得证. 对任意 $u \in S$, 有 $\sigma(u + \operatorname{Rad} V) = u$, 且若

$$\sigma(v + \operatorname{Rad} V) = 0, \quad v = v_1 + v_2,\ v_1 \in \operatorname{Rad} V,\ v_2 \in S,$$

则有 $v_2 = 0$, 那么 $v = v_1 \in \operatorname{Rad} V$, 于是 $v + \operatorname{Rad} V = 0 + \operatorname{Rad} V$. 故上述定义的 σ 为双射. 对任意 $w_1, w_2 \in S$,

$$(\sigma(w_1 + \operatorname{Rad} V), \sigma(w_2 + \operatorname{Rad} V)) = (w_1, w_2) = (w_1 + \operatorname{Rad} V, w_2 + \operatorname{Rad} V),$$

因此 σ 为等距同构. 也可利用

$$V = \operatorname{Rad} V \mathbin{\bigcirc\!\!\!\!\perp} S = \operatorname{Rad} V \mathbin{\bigcirc\!\!\!\!\perp} V/\operatorname{Rad} V,$$

结合 Witt 消去定理得到同构. □

题目 4.2. 设 $V = S \mathbin{\bigcirc\!\!\!\!\perp} T$. 证明 V 非退化当且仅当 S 和 T 非退化.

证明. 若 V 非退化, 则 $S \cap S^{\perp} \subseteq T^{\perp} \cap S^{\perp} \subseteq V^{\perp} = 0$, 即 S 非退化. 同理 T 也非退化. 反之当 S 和 T 均非退化时, 任取 $u = v + w \in V^{\perp}$ 满足 $v \in S$, $w \in T$, 根据定义对任意 $v' \in S$ 和 $w' \in T$ 有

$$(v, v') = (v + w, v') - (w, v') = 0,\ (w, w') = (v + w, w') + (v, w') = 0,$$

于是 $v \in S \cap S^{\perp} = 0$, $w \in T \cap T^{\perp} = 0$, 即 $u = v + w = 0$. 由 $u \in V^{\perp}$ 的任意性可知 $V^{\perp} = 0$, 即 V 非退化. □

题目 4.3. 证明子空间 $S \subseteq V$ 为双曲平面当且仅当 S 为非退化二维子空间且含有迷向向量.

证明. 充分性是显然的, 下证必要性. 设 α 为 S 的迷向向量, $\beta \in S$ 满足 $(\alpha, \beta) \neq 0$. 不妨令 $(\alpha, \beta) = 1$. 下面只需说明 α, β 构成 S 的一组基即可. 若不然, 由 $\alpha \neq 0$ 知 $\beta \in \operatorname{span}(\alpha, \beta) = \operatorname{span}(\alpha)$, 可设 $\beta = k\alpha$, 那么由 α 是迷向向量可知 $(\alpha, \beta) = 0$, 矛盾. □